

紙飛行機における、
スケール変更による飛行速度・揚力係数
および速度感の変化

BAK=DAN Aircraft Research

序文

紙飛行機において、ある機体をより高速で飛ばそうとすると飛行時の揚力係数を小さくしなければならず、舵角調整が敏感になり飛ばすのが難しくなってしまう。舵角調整の感度を同じくして高速化するためには翼面荷重を上げる必要があり、機体の大きさをそのままにして重量を増す方法と、機体全体をスケールアップして2乗3乗の法則で相対的に重量を増す方法がある。

前者については単純な計算で速度増加分を算出できるが、後者についてはより複雑になるので、「速度感」も含めて各パラメータの変化を直感的に把握できるよう、グラフにまとめた。

なお、一般的概念ではない「舵角調整感度」と「速度感」について、あらかじめパラメータとして明確に定義しておく。

舵角調整感度のパラメータ化

舵角調整感度とは、舵角を変えた時に機体の飛行にどの程度影響が出るかを言い、飛行速度や翼面荷重、その時の揚力係数等によって支配される。舵角調整感度が同一であるということは、例えば同じ機体で重量を増した場合、速度も増して、舵を1度切った時に重量増加前と同様な変化をもたらす事を言う。ここで「同様な変化」とはこれも半ば感覚的なもので、例えば機首が3度上がって1秒後に速度が元の速度より2%下がったというような複雑なものになる。ただ、指標として同じ揚力係数で飛行していれば同一飛行感は得られるのではないかと推察できるので、「舵角調整感度が同一」を「揚力係数が同一」とここでは置き換えるものとする。そして、経験的に、「舵角調整感度」は「揚力係数」と反比例の関係にある。これは冒頭に述べたように、機体を速く飛ばそうとしてエレベータを下げていくと、舵角の調整が敏感になって水平飛行が難しくなることで説明される。

$$\text{舵角調整感度} = \frac{1}{\text{揚力係数 } C_l}$$

「速度感」の定義

機体がどれだけ速く飛んでいるかを知る方法として、速度そのものを測る方法と、「どれだけ速く感じるか」を調べる方法がある。後者は紙飛行機の場合、自分が乗ることはないので、地上にいる人が見て感じる速さということになる。感覚的なものなのではっきり数値化するのは難しいが、速さの基準がはっきりしていれば不可能ではない。飛行機であれば飛行方向の長さ、すなわち機体全長を基準に取った場合の飛行速度がこれに当たる。

$$\text{速度感 } V_L = \frac{\text{飛行速度 } v}{\text{機体全長 } L}$$

例えばロッキード F-104 スターファイター戦闘機とボーイング 747 ジャンボ旅客機は共に離陸速度が 300 km/h 程度(約 85 m/s)であるが、巨大なジャンボ旅客機の方がはるかにゆっくり飛んでいるように見える。すなわち「速度感」が小さいと言える。ちなみに全長は、F-104 は 16.7 m、ボーイング 747 は 70.7 m である。

$$\begin{aligned} \text{F-104 の速度感} & 85 / 16.7 \doteq 5 \\ \text{747 の速度感} & 85 / 70.7 \doteq 1.2 \end{aligned}$$

よって、F-104 の速度感 は 747 の約 4 倍となる。

なおこの「速度感」は、単独で値を示すことにはあまり意味はなく、他と比較することで意味を持つ。すなわち F-104 の速度感が 5 であることには意味はなく、747 と比べて 4 倍であることに意味がある。

記号

倍数 n (縮小の場合は $0 < n < 1$ 、拡大の場合は $1 < n$)

機体重量 W

翼面積 S

揚力係数 C_l

空気密度 ρ

速度感 V_L

飛行速度 v

機体全長 L

変更後の値 ' (添字)

航空力学方程式

基本式は

$$W = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_l$$

変更し得るパラメータを考慮すると

$$W' = \frac{1}{2} \rho v'^2 S' C_l'$$

変更前との比較を考えると

$$\frac{W'}{S'} / \frac{W}{S} = \frac{v'^2 \cdot C_l'}{v^2 \cdot C_l} \dots\dots\dots \text{式①}$$

I. 重量もスケールも変更せず、飛行速度のみを変更した場合

比較の基準として、重量もスケールもそのまま飛行速度のみ変える場合をまず考える。
この場合、式①で左辺=1となるから、 C_1 のみが影響を受ける。

$$1 = \frac{v'^2 \cdot C_1'}{v^2 \cdot C_1} \quad , \quad \frac{v'}{v} = n \quad (\text{速度 } v \text{ を } n \text{ 倍})$$

より

$$n^2 \cdot \frac{C_1'}{C_1} = 1$$

$$\therefore \frac{C_1'}{C_1} = \frac{1}{n^2}$$

速度感は $V_L = \frac{v}{L}$ 、 $L' = L$ であるから

$$\frac{V_L'}{V_L} = \frac{v'}{L'} \bigg/ \frac{v}{L} = \frac{v'}{v} = n$$

II. スケールは変更せずに、重量のみを変更した場合

式①において

$$\frac{S'}{S} = 1 \quad , \quad \frac{W'}{W} = n$$

であるから

$$\frac{W'}{S'} \bigg/ \frac{W}{S} = \frac{W'}{W} = \frac{v'^2 \cdot C_1'}{v^2 \cdot C_1} = n \quad \dots\dots\dots \text{式②}$$

a) 飛行速度が一定の場合

式②において

$$\frac{v'}{v} = 1$$

とおくと

$$\frac{C_1'}{C_1} = n$$

v, L は変化しないから

$$\frac{V_L'}{V_L} = 1$$

b) 揚力係数が一定の場合

式②において

$$\frac{C_1'}{C_1} = 1$$

とおくと

$$\frac{v'^2}{v^2} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = n$$

$$\therefore \frac{v'}{v} = \sqrt{n}$$

また、 $V_L = \frac{v}{L}$ であるから

$$\frac{V_L'}{V_L} = \frac{\sqrt{n} v}{L} / \frac{v}{L} = \sqrt{n}$$

Ⅲ. スケールを変更した場合(重量はスケール変更による変化)

スケールを変更するとは3次元方向に同率で縮小・拡大することであるから、2乗3乗の法則により重量・翼面積は次のように変化する。

$$\begin{aligned} W' &= n^3 \cdot W \\ S' &= n^2 \cdot S \end{aligned}$$

よって、翼面荷重の増減は

$$\begin{aligned} \frac{W'}{S'} &= \frac{n^3 \cdot W}{n^2 \cdot S} = n \cdot \left(\frac{W}{S} \right) \\ \frac{W'}{S'} / \frac{W}{S} &= n \end{aligned}$$

a) 飛行速度が一定の場合

式①において、飛行速度一定の時は $v' = v$ であるから

$$\frac{C_l'}{C_l} = n$$

この時 V_L は $L' = nL$ であるから

$$\begin{aligned} V_L' &= \frac{v'}{L'} = \frac{v}{nL} = \frac{1}{n} V_L \\ \therefore \frac{V_L'}{V_L} &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

b) 揚力係数が一定の場合

また、式①において、揚力係数一定の時は $C_l' = C_l$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{v'^2}{v^2} &= \left(\frac{v'}{v} \right)^2 = n \\ \therefore \frac{v'}{v} &= \sqrt{n} \\ v' &= \sqrt{n} v \quad \dots\dots\dots \text{式③} \end{aligned}$$

舵角調整感度を同一にしたい事を考えると、揚力係数が一定の場合に相当する。
従って速度感

$$V_L = \frac{v}{L}$$

は $L' = nL$ と式③から

$$V_L' = \frac{v'}{L'} = \frac{\sqrt{n} v}{n L} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{v}{L} = \frac{1}{\sqrt{n}} V_L$$

$$\therefore \frac{V_L'}{V_L} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) 速度感が一定の場合の飛行速度と揚力係数

ところで、スケールを変更した時に速度感も保ちたいという要望が出てくるのが予想される。この場合についても考えておこう。

スケール変更の場合、式①は次のようになる。

$$\frac{W'}{S'} / \frac{W}{S} = \frac{v'^2 \cdot C_1'}{v^2 \cdot C_1} = n$$

ここで速度感一定の条件を $V_L' = V_L$ 加えると、速度感は $V_L = \frac{v}{L}$ 、スケール変更により $L' = nL$ であるから

$$\frac{v'}{L'} = \frac{v}{L} = \frac{nv}{nL}$$

$$v' = nv$$

$$\therefore \frac{v'}{v} = n$$

また、 $\frac{v'^2 \cdot C_1'}{v^2 \cdot C_1} = n$ 式より

$$n^2 \cdot \frac{C_1'}{C_1} = n$$

$$\therefore \frac{C_1'}{C_1} = \frac{1}{n}$$

結論

ある機体で、速度感を犠牲にしても舵角調整感度を保ったまま飛行速度を上げたい場合は、スケールアップで実現できる。逆を言えば、舵角調整感度を保ったまま速度感と飛行速度を同時に上げることはできない。

以下、変更する又はされるパラメータ

変更率 n

重量 W

翼面荷重 W/S

飛行速度 v

揚力係数 C_l

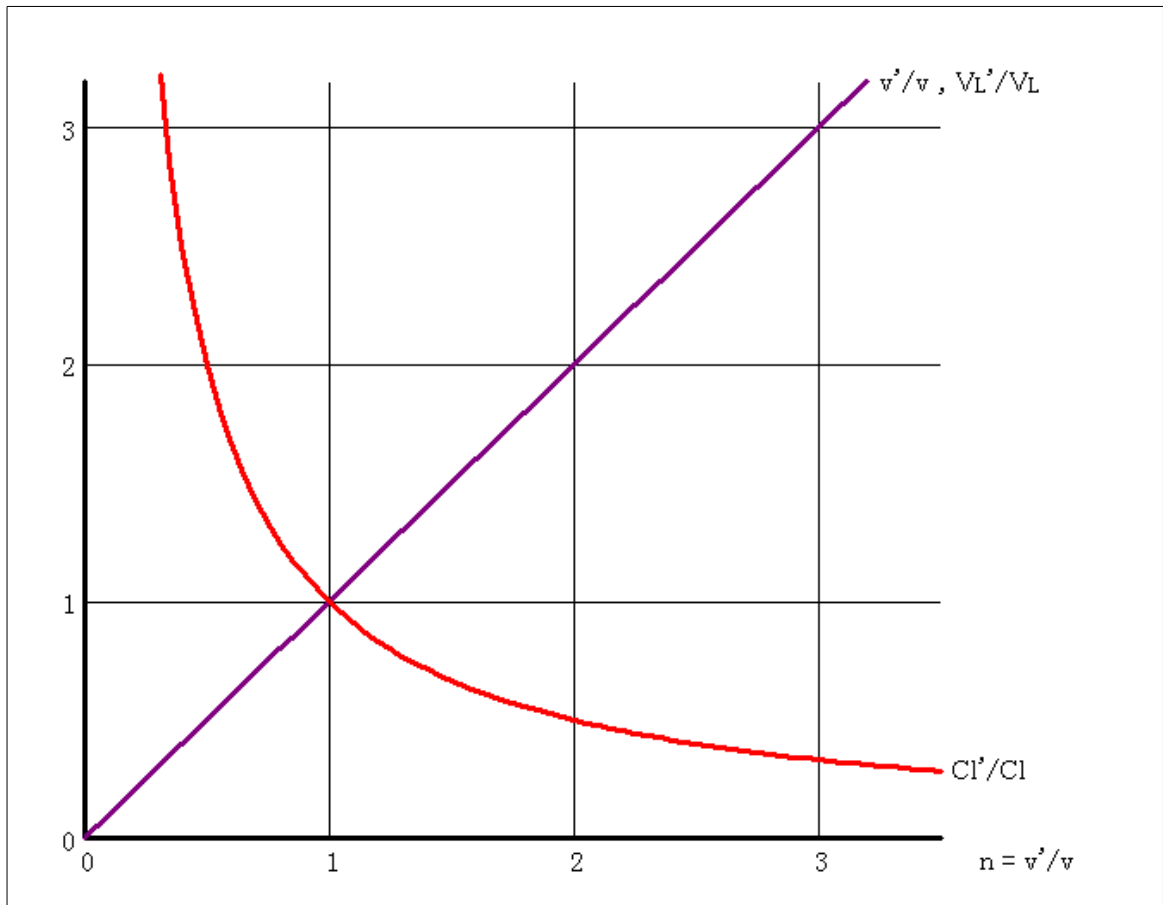
速度感 V_L

に注目し、各パラメータの変化の相互関係を、以下の条件別にグラフに示す。

- ・変更条件(最初に n 倍と定める条件)
- ・確定条件(次に一定と定める条件)
- ・追従条件(以上の2条件により決定される条件)

なお、これらのパラメータは全て「変更後／変更前」の比率の値とし、その式を各グラフ下に示す。

I. 重量もスケールも変更せず、飛行速度のみを変更した場合



・変更条件

$$\frac{v'}{v} = n \quad (\text{速度 } v \text{ を } n \text{ 倍})$$

・確定条件

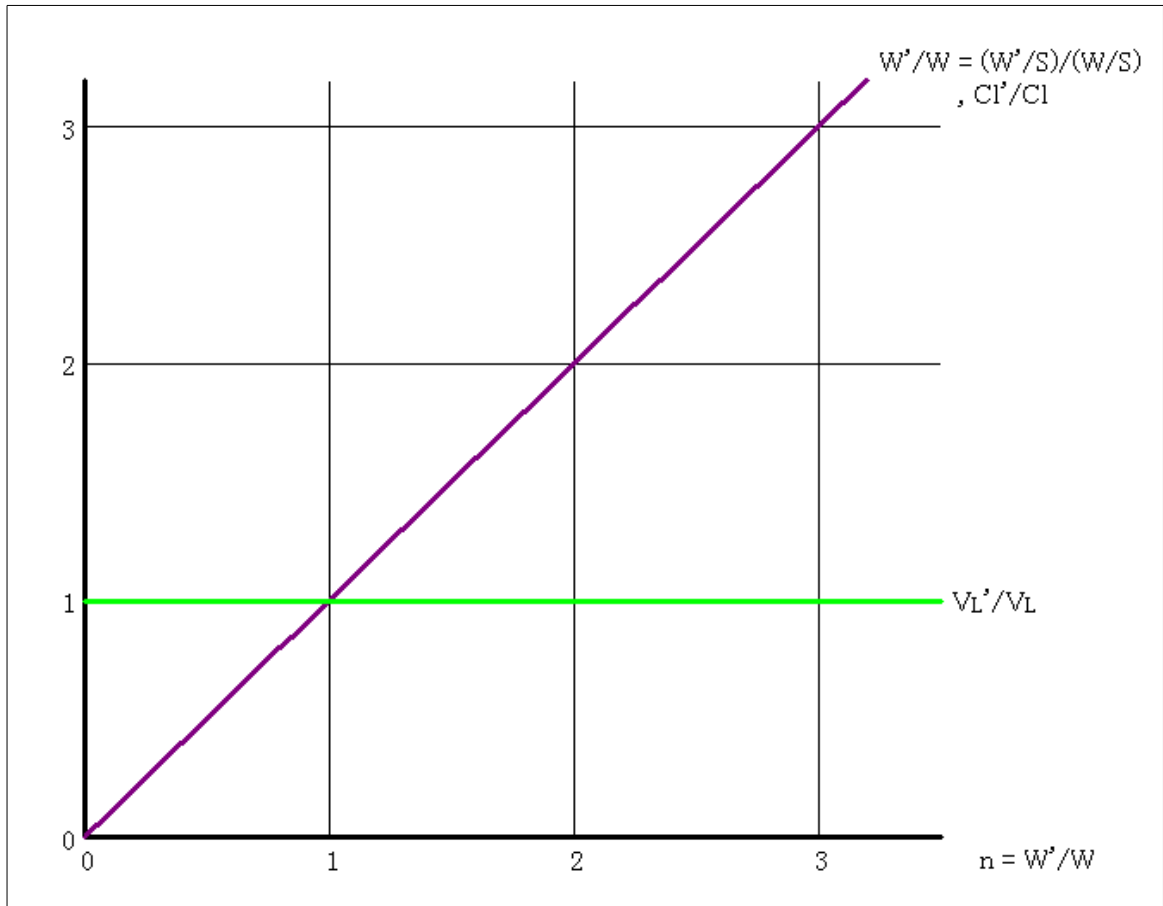
$$\frac{L'}{L} = 1 \quad (\text{スケール一定}), \quad \frac{W'}{W} = \frac{W'}{S'} / \frac{W}{S} = 1 \quad (\text{重量一定})$$

・追従条件

$$\frac{C_l'}{C_l} = \frac{1}{n}, \quad \frac{V_L'}{V_L} = n$$

II. スケールは変更せずに、重量のみを変更した場合

a) 飛行速度が一定の場合



・変更条件

$$\frac{W'}{W} = \frac{W'}{S'} / \frac{W}{S} = n$$

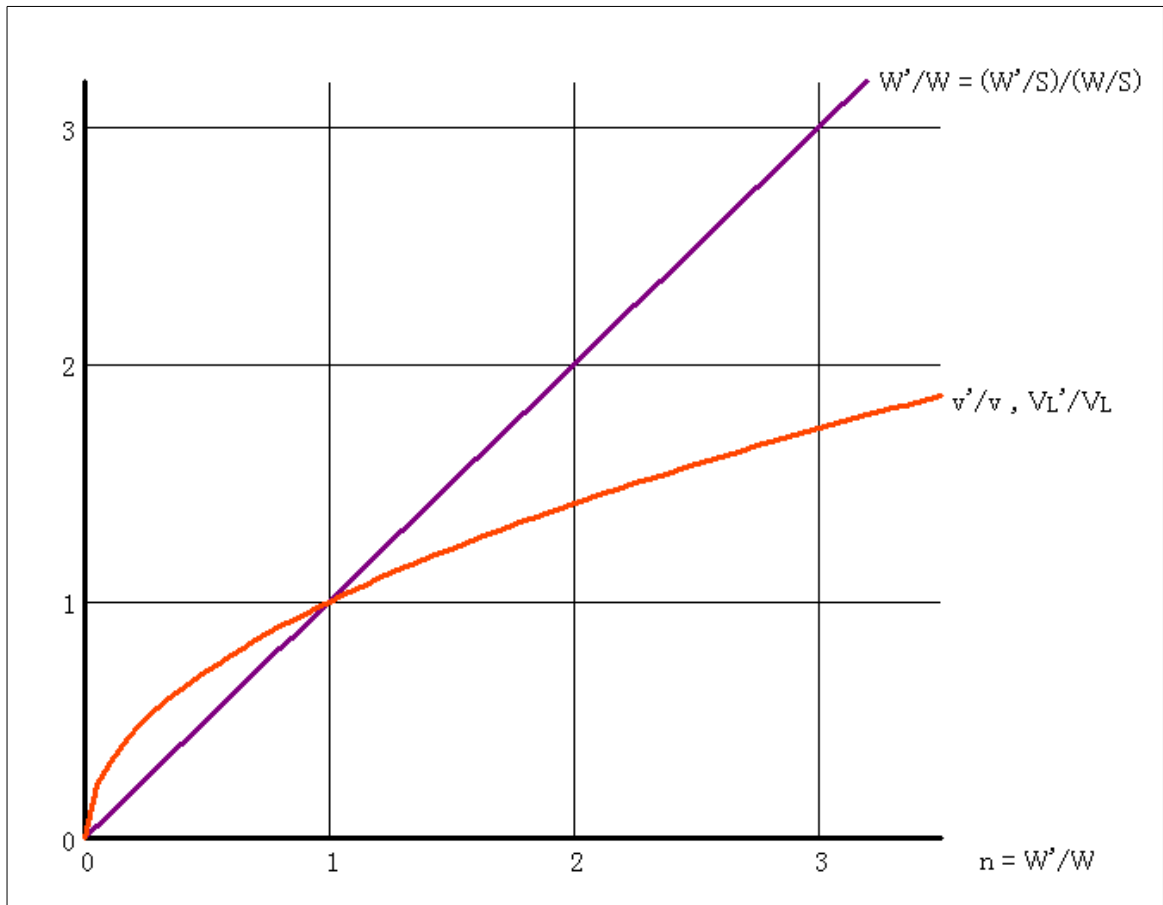
・確定条件

$$\frac{L'}{L} = 1, \quad \frac{v'}{v} = 1$$

・追従条件

$$\frac{V_L'}{V_L} = 1, \quad \frac{C_l'}{C_l} = n$$

b) 揚力係数が一定の場合



・変更条件

$$\frac{W'}{W} = \frac{W'}{S'} / \frac{W}{S} = n$$

・確定条件

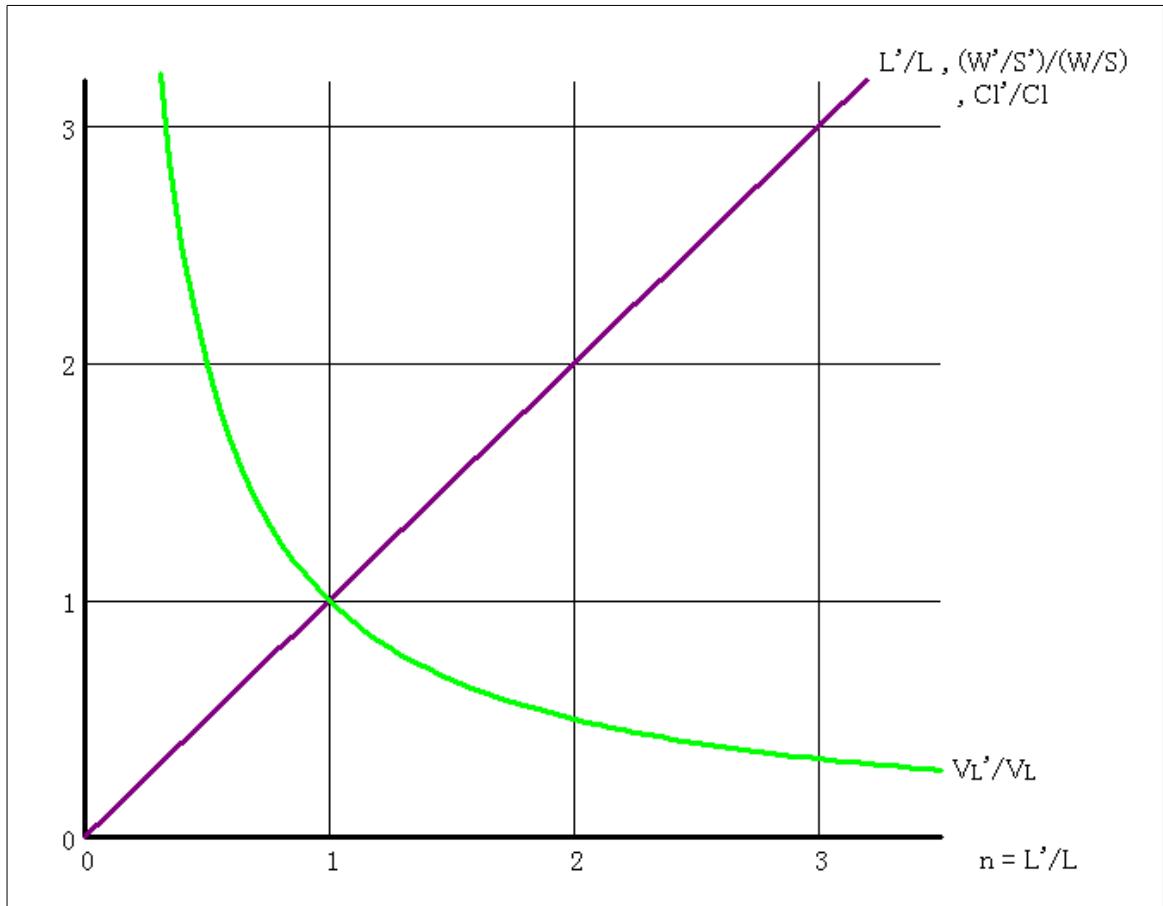
$$\frac{L'}{L} = 1, \quad \frac{C_1'}{C_1} = 1$$

・追従条件

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{n}, \quad \frac{V_L'}{V_L} = \sqrt{n}$$

Ⅲ. スケールを変更した場合

a) 飛行速度が一定の場合



・変更条件

$$\frac{L'}{L} = n$$

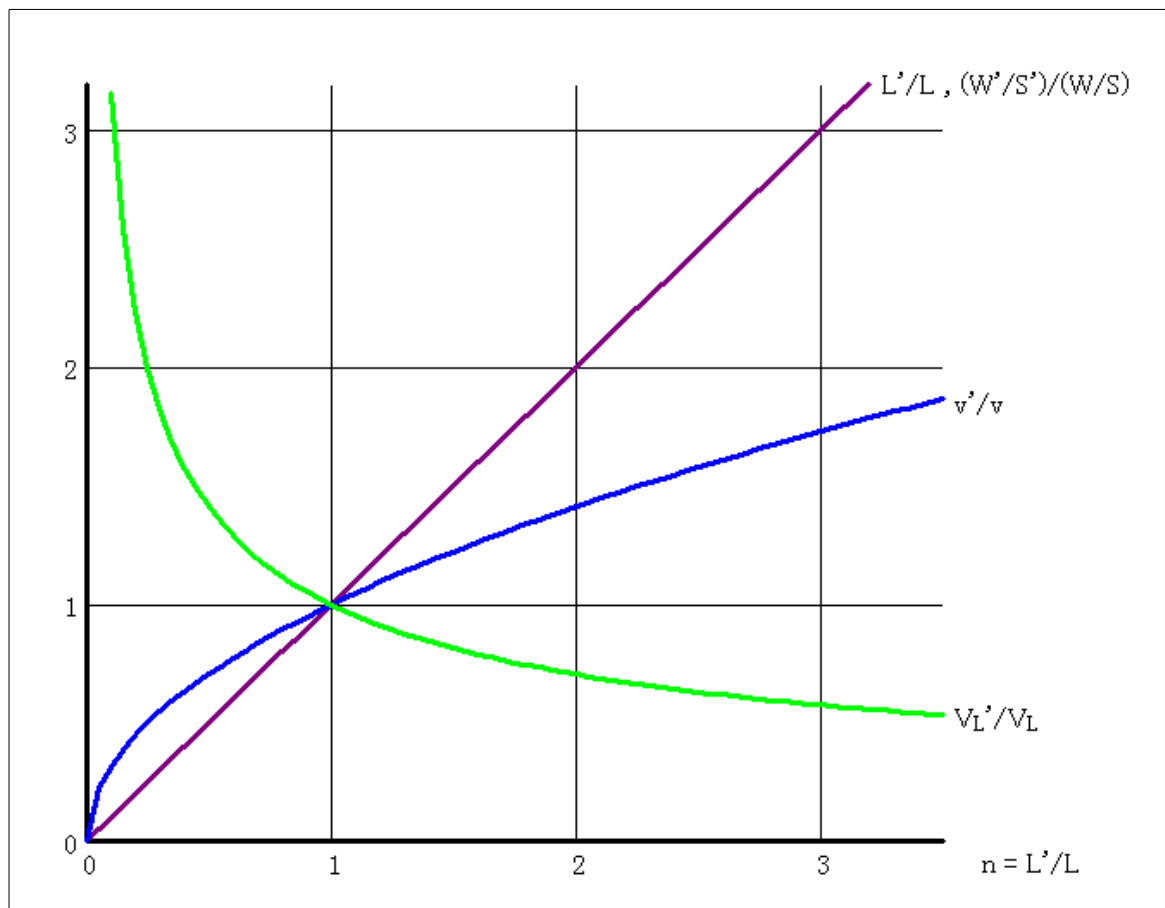
・確定条件

$$\frac{v'}{v} = 1$$

・追従条件

$$\frac{W'}{S} / \frac{W}{S} = n, \quad \frac{C_l'}{C_l} = n, \quad \frac{V_L'}{V_L} = \frac{1}{n}$$

b) 揚力係数が一定の場合



・変更条件

$$\frac{L'}{L} = n$$

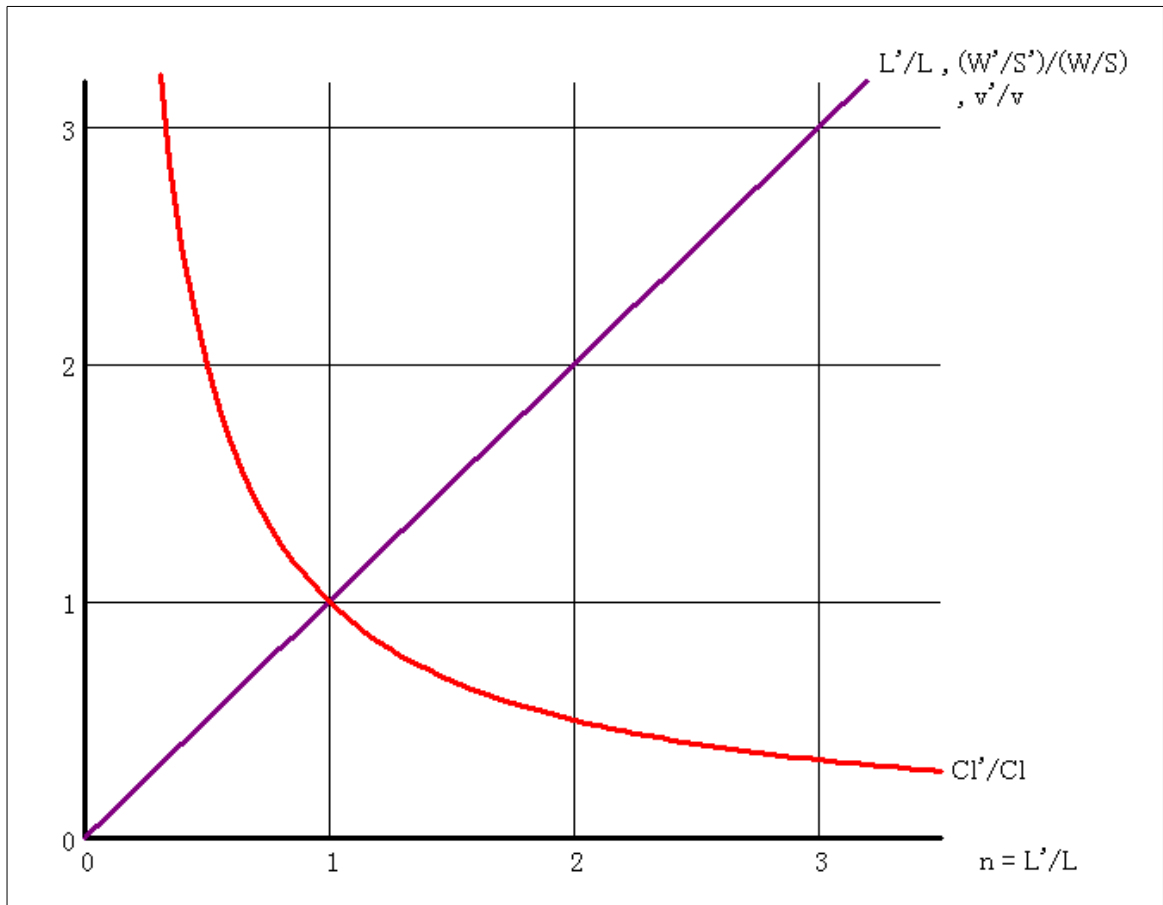
・確定条件

$$\frac{C_1'}{C_1} = 1$$

・追従条件

$$\frac{W'}{S} / \frac{W}{S} = n, \quad \frac{v'}{v} = \sqrt{n}, \quad \frac{V_L'}{V_L} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) 速度感が一定の場合



・変更条件

$$\frac{L'}{L} = n$$

・確定条件

$$\frac{V_L'}{V_L} = 1$$

・追従条件

$$\frac{W'}{S} / \frac{W}{S} = n, \quad \frac{v'}{v} = n, \quad \frac{C_1'}{C_1} = \frac{1}{n}$$